DOI: 10.16078/j.tribology.2019191

# 粗糙表面统计接触模型的提出与发展

刘 勇1\*,夏 天2,陈志英3,闫国华1,4

(1. 中国民航大学 航空工程学院, 天津 300300;

2. 天津电子信息职业技术学院, 天津 300350;

3. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院,北京 100191;

4. 中国民航大学基础实验中心,天津 300300)

摘 要:工程表面在微观尺度上是粗糙的,粗糙表面之间的接触状态对于多种物理现象都有重要影响,因此,粗糙表面间的接触建模方法一直是摩擦学领域研究的热点.由Greenwood和Williamson提出的GW统计接触模型是最受认可的粗糙面接触模型,回顾了基于统计分析的粗糙面接触模型的发展,根据对GW模型主要缺点的改进,介绍了统计接触模型的研究现状,总结了统计接触模型未来可能的研究热点.

关键词: 粗糙表面; 统计分析; 接触建模; 微凸体; 弹塑性变形 中图分类号: O313.5, TH131 文献标志码: A

文章编号:1004-0595(2020)03-0395-12

# The Development of Statistical Contact Model for Rough Surface

LIU Yong<sup>1\*</sup>, XIA Tian<sup>2</sup>, CHEN Zhiying<sup>3</sup>, YAN Guohua<sup>1,4</sup>

(1. College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China
 2. Tianjin Electronic Information College, Tianjin 300350, China
 3. School of Energy and Power Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China
 4. Basic Experiment Center, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract**: The engineering surface is rough on microscopic scale. The contact behaviour between rough surfaces has a significant influence on various physical phenomena. Therefore, the method of contact modeling between rough surfaces has been a hot topic in the field of tribology for a long time. The GW statistical contact model proposed by Greenwood and Williamson is the most recognized rough surface contact model. The developments of rough surface contact model based on statistical analysis were reviewed in the present work. According to the improvements of the main defects of GW model, the research status of the statistical contact model was introduced. Some possible research hotspots of the statistical contact model in the future were summarized.

Key words: rough surface; statistical analysis; contact modeling; asperity; elastoplastic deformation

物体表面很少是完全平坦的<sup>[1]</sup>,即使是经过仔细 加工的工程表面,当对其进行放大时会发现表面是由 许多大小不一的粗糙峰(微凸体)构成的<sup>[2]</sup>.物体表面的 曲率或者粗糙度通常会使两个粗糙表面在接触过程 中产生接触的区域只发生在这些微凸体上,导致实际 的接触面积要远小于名义接触面积<sup>[3-4]</sup>,而且接触面不 连续,因此产生的接触压力和应力通常相对较高.在 许多情况下这将导致接触区域的变形超出材料弹性 变形的范围而发生失效或者屈服.尤其是在金属表面 的接触中,除了发生弹性变形外,大多数情况下还伴 随有塑性变形的发生.物体之间的真实接触状况对于 研究和分析诸如摩擦、润滑、磨损、黏附、断裂、导热和

Received 21 October 2019, revised 6 January 2020, accepted 14 January 2020, available online 28 May 2020.

<sup>\*</sup>Corresponding author. E-mail: liuyongyb@126.com, Tel: +86-13502038386.

The project is supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (3122019093).

中央高校基本科研业务费项目(3122019093)资助.

导电等物理现象都具有重要意义<sup>[5-6]</sup>,这其中涉及的工 程应用包括轴承、机械接口、机械密封、凸轮、齿轮和 接头结构等<sup>[7]</sup>.研究粗糙表面微凸体的接触变形规律 以及接触力学性能,建立可用于工程实际的粗糙表面 接触模型,不仅有助于提高接触体表面的承载能力, 延长接触体的使用寿命,提高接触零部件的接触可靠 性,而且对于摩擦学基础研究也具有积极的促进作用<sup>[8]</sup>.

截止到目前为止,有关粗糙表面接触建模的综述 性文章已有若干篇发表<sup>[4,7,9-18]</sup>, 1996年Bhushan<sup>[9]</sup>将单 个微凸体的接触问题分为弹性固体的解析模型和层 状固体弹塑性问题的有限元模型来进行综述. 1998年 Bhushan<sup>[10]</sup>按照粗糙表面微凸体的分布高度和几何形 状是否有明确定义将接触模型分为两类进行了讨论, 在此基础上, Bhushan根据接触面间是否存在液膜、接 触面是否为同性材料、是否考虑切向载荷等,对接触 模型做了详细评述. 1999年Liu和Wang等[11]从粗糙面 轮廓的描述方法、接触压力与表面位移关系的表示方 法以及接触压力和表面位移方程的求解技术三方面 对接触模型进行分类和回顾,并且对当时接触建模研 究的最新进展进行了简要介绍. 2000年Adams和 Nosonovsky<sup>[12]</sup>对单个微凸体的接触力学模型和多微 凸体的接触模型进行了介绍,重点介绍了接触面之间 产生的作用力,并且介绍了弹性接触中的黏附力. Barber和Ciavarella<sup>[13]</sup>集中讨论了弹性接触问题,包括 热弹性问题和各项异性材料的弹性接触问题,并目针 对摩擦、磨损和粗糙度对接触的影响进行了评述.魏 龙和顾伯勤等<sup>[14]</sup>于2009年将粗糙表面的接触模型分 为Hertz接触模型、统计学接触模型和分形接触模型三 类,对三类模型各自的优缺点进行了简要评述.胡兆 稳和刘焜等[15]根据建模过程中是否对粗糙表面微凸 体的形状和高度进行假设将接触模型分为两类:统计 接触模型和数值接触模型,并且对多尺度的接触模型 也进行了介绍,比较新的以接触问题和接触建模为主 题的综述性论文分别由Ghaednia和Wang等<sup>17</sup>以及 Müser等<sup>[16]</sup>发表于2017年, Ghaednia和Wang等<sup>[7]</sup>重点 介绍了单个微凸体的接触模型,并且按照微凸体的几 何形状以及加载方式对模型进行了分别评述: Müser 等<sup>[16]</sup>根据接触模型求解策略的不同对模型进行分类 介绍,并且通过计算机模拟生成了1个粗糙表面,在世 界范围内邀请各个研究机构利用各自的接触理论和 模型基于该粗糙表面进行接触建模,重点对比了不同 接触模型的计算效果. 另外, 文献[4, 17-18]主要针对 基于分形理论的粗糙表面接触模型进行了介绍.

统计接触模型是认可度最高的粗糙表面接触模型,但是,目前尚无针对统计接触模型的专门综述性 文章,大部分与本文主题相关或相近的综述性文章的 发表时间已经较为久远,虽然文献[7]和文献[16]于最 近两年才发表,但是在文献[7]中,作者关注的重点是 单个微凸体的接触模型,对粗糙表面的接触模型的介 绍进行了简化,而文献[16]中作者重点对几种不同接 触模型的代表模型的计算效果进行对比分析和评价. 有鉴于此,本文作者将针对粗糙表面统计接触模型的 发展历史和研究现状进行总结,介绍国内外在粗糙表 面统计接触建模方面取得的最新进展,探索统计接触 模型今后可能的研究趋势,为未来的研究提供参考和 建议.

# 1 粗糙表面接触建模概述

#### 1.1 单个微凸体的变形

在建立粗糙表面接触模型之前,首先要明确粗糙 表面上微凸体的变形规律,该问题也被称为点接触或 赫兹接触(Hertz contact)<sup>[7]</sup>,是接触力学中最重要的问 题,已经引起学者们1个多世纪的关注<sup>[9,19-21]</sup>.人们的普 遍共识是微凸体的变形分为弹性变形、弹塑性变形和 塑性变形3个阶段<sup>[22-26]</sup>.

对两个弹性体接触处应力状态的令人满意的分析是由Hertz首先提出的,Hertz接触理论也是经典接触模型的基础<sup>[14]</sup>,至今仍然是研究弹性接触问题的重要基础理论之一<sup>[27-31]</sup>.根据Hertz理论,半径分别为*R*<sub>1</sub>和*R*<sub>2</sub>的两个球体进行弹性接触时,接触面积*a*<sub>e</sub>、接触载荷 *f*<sub>e</sub>、最大接触压力*p*<sub>em</sub>、平均接触压力*p*<sub>ea</sub>可以表示为变形量ω的函数:

$$a_{\rm e} = \pi R \omega \tag{1}$$

$$f_{\rm e} = \frac{4}{3} E R^{\frac{1}{2}} \omega^{\frac{3}{2}}$$
 (2)

$$p_{\rm em} = \left(\frac{2E}{\pi}\right) \left(\frac{\omega}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

$$p_{\rm ea} = \frac{2}{3} p_{\rm em} = \left(\frac{4E}{3\pi}\right) \left(\frac{\omega}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

式(1~4)中, R满足关系式 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ,为相对曲率; E满足关系式 $\frac{1}{E} = \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} (E_1, E_2, v_1 \pi v_2 \beta \eta)$ 两接触体的弹性模量和泊松比),为等效弹性模量. Hertz接触理论只适用于无塑性变形的弹性接触,对于 金属表面的接触,当接触应力超过材料的屈服强度之 后,会在接触微凸体的内部发生初始屈服. 从微凸体内部发生初始屈服到整个微凸体发生 塑性变形过程中,微凸体处于弹性变形和塑性变形共 存的状态,即弹塑性变形状态.到目前为止,还没有从 基本原理推导出来的弹塑性接触的闭合解.大多数已 发表的模型通过研究球体和平板之间的接触来简化 分析,并应用有限元法<sup>[32-40]</sup>或者弹性理论和近似解的 组合来模拟这种接触,该研究思路首先由Sinclair和 Follansbee提出<sup>[7]</sup>.这类弹塑性模型可以分为三大类: 即压平模型、压入模型和综合模型<sup>[7,20]</sup>.在压平模型 中,平面被认为是光滑的刚性平面,整个变形发生在 微凸体中.在压入模型中,认为微凸体是刚性的,平面 是可变形的.而综合模型中认为接触的两个物体都是 可变形的.尽管Jackson和Kogut<sup>[47]</sup>明确指出了压平模 型和压入模型之间的区别,但是大多数学者在进行接 触建模时并没有考虑二者的区别.

在高载荷下,当塑性变形扩展至整个微凸体时, 认为此时微凸体达到完全塑性变形状态,和弹性变形 一样,塑性变形也是弹塑性问题的1个极限状态<sup>[7]</sup>.关 于塑性变形的解析分析,目前常用的思路是忽略微凸 体的下沉和堆积,采用Tabor的<sup>[48]</sup>布氏压入试验结果来 表示微凸体发生完全塑性变形时的平均接触压力*p*<sub>pa</sub>、 接触面积*a*<sub>p</sub>和接触载荷*f*<sub>p</sub><sup>[49]</sup>:

$$p_{\rm pa} = H \tag{5}$$

$$a_{\rm p} = 2\pi R\omega \tag{6}$$

$$f_{\rm p} = 2\pi R \omega H \tag{7}$$

式(5)和式(7)中, H为材料硬度, 认为材料硬度H与材料屈服强度 $\sigma_y$ 满足关系式 $H = 2.84\sigma_y$ (有时系数也取为3).

#### 1.2 粗糙表面的描述和表征

在对粗糙表面进行接触建模来分析其接触行为 和接触特性之前,需要对表面的拓扑形貌进行准确合 理地刻画,具体来讲通过明确粗糙表面微凸体的数 量、大小(高度、曲率半径)、形状和位置等参数来描述 和表征1个粗糙表面<sup>[50]</sup>.目前,大致可以将对粗糙表面 的描述归纳为以下三类:确定性描述、统计描述和分 形描述.

(1) 确定性描述

对粗糙表面的确定性描述方法很少对表面的几 何形貌进行假设,即不需要对微凸体的形状和高度分 布等参数进行假设,而是利用表面形貌参数的数字化 技术手段来获取表面形貌的具体参数<sup>[51]</sup>,常用的表面 形貌测量设备有针触式表面轮廓仪、扫描电子显微镜 (SEM)、原子力显微镜 (AFM)、扫描隧道显微镜 (STM)等. 虽然由于仪器分辨率的原因,不同仪器测量 同一表面得到的表面形貌会略有差别,但是通过测量 得到的粗糙表面上每一点的高度坐标是1个客观存在 的确定值,所得表面是1个已经明确界定了的特定表 面(a well-defined surface). 对粗糙表面的确定性描述 是建立确定性接触模型、进行表面接触数值模拟的基 础. 值得注意的是,随着计算机技术的发展,针对大规 模数据的高效计算已经得以实现,这促使以粗糙表面 确定性模型为基础的表面接触的数值模拟受到越来 越多的学者的重视,并且已经成为摩擦学领域的1个 重要的发展方向.

#### (2) 统计描述

对粗糙表面的统计描述为反映其随机特性提供 了方法[11],可分为随机过程描述和微凸体高度分布描 述.随机过程描述是将粗糙表面相对于其平均平面的 偏离看作是1个随机过程,即假设表面上各点的高度 坐标的取值为随机过程,并可通过一定的分布函数和 自相关函数加以描述,由此确定粗糙表面的几何形貌. 微凸体高度分布描述假设微凸体的高度和曲率满足 某种统计规律,通过给定统计分布函数来确定.由此 可见, 微凸体高度分布描述是对随机过程描述的简 化,它将1个包含多尺度信息的粗糙表面简化为单一 尺度的表面.在用统计方法描述粗糙表面时,为了利 用已有的接触力学理论进行接触分析,通常还需要确 定微凸体顶端的形状以及表面上微凸体的数量.对粗 糙表面的统计描述的最大优点在于,其表达方式简单 明了,这极大简化了粗糙表面间接触方程的推导,有 利于进行粗糙表面间的快速接触分析.

#### (3)分形描述

随着研究的深入,有学者发现粗糙表面的形成实际上是1个非平稳的随机过程<sup>[52]</sup>,微凸体的高度分布与采样长度相关.将粗糙表面进行放大后,更多更小的细节会显现出来,即粗糙表面具有分形特性,因此可采用分形参数(分形维数D和特征长度尺度系数G)来描述粗糙表面的几何形貌,这样一来便能包含粗糙表面的多尺度信息.值得注意的是,对粗糙表面的随机过程描述实际上也包含了多尺度信息,统计学参数和分形参数之间应该存在某种联系,而这种联系目前还没有得到充分的研究和揭示.对粗糙表面的分形描述是建立分形接触模型的基础,在利用表面粗糙度测量仪器提取表面形貌数据的基础上,基于分形理论计算表面的分形参数,由此确定其形貌特征,生成粗糙表面,之后进行接触建模工作.

#### 1.3 主要度量指标

(1) 接触载荷与接触面积的关系

如前所述,两个粗糙表面在接触过程中,彼此之 间并不能完美地贴合,真实接触仅出现在粗糙表面的 较高微凸体上,从而导致真实接触面积远小于名义接 触面积,而且接触面不连续,如图1所示<sup>[16]</sup>.由于粗糙 表面间的真实接触面积与摩擦、磨损、断裂、导热和导 电等诸多物理现象有着密切联系,因此如何准确获得 接触载荷和真实接触面积之间的映射规律,一直是粗 糙表面间接触建模工作的重点,接触载荷和真实接触 面积之间映射规律的准确性也就成为衡量接触模型 好坏的重要指标之一.



 Fig. 1
 Real contact area measured by experiment

 图 1
 实验测定的真实接触面积

(2) 接触载荷与平均表面分离距离的关系

两个粗糙表面在接触时,随着接触载荷的增加, 平均表面之间的分离距离会逐渐减小,减小的程度直 接影响着表面上微凸体的变形量的大小、变形方式以 及接触面积的大小,所以平均表面分离距离随接触载 荷的变化规律也常常被用来评价接触模型的优劣.

### 1.4 存在的问题和挑战

对于粗糙表面的接触建模存在的问题和挑战主

要有以下2个方面:

(1)如何合理地选择接触模型.由于缺乏严格的 实验验证和完整的解析解,使得学者们在从事结合面 刚度建模、泄漏率预测、导电率的计算等需要用到接 触模型的理论研究工作时,很难选择合适的接触模型. 而对于实验学界来说,这也使得他们很难对不同学者 的结果和解释进行判断.

(2)如何将粗糙表面的随机性和多尺度特性包含 在接触模型中.由于粗糙度的随机性和多尺度特征的 复杂性,很难将其包含在模型中.尽管如此,许多学者 尝试过解决这个问题,然而,如前所述,由于实际接触 面积难以精确测量,仍然很难通过实验的手段来对其 解决效果进行评价.

# 2 GW统计接触模型

1966年,由 Greenwood和 Williamson<sup>[53]</sup>提出的 GW接触模型是统计接触分析的典型代表,为粗糙表 面间的接触理论奠定了具有里程碑意义的基础,至今 这一模型仍被研究者接受和使用<sup>[51,54]</sup>.

GW模型中,将两个粗糙表面的接触等效为1个光 滑的刚性平面和1个粗糙表面的接触,并且假设各个 微凸体的曲率半径都为*R*,如图2所示.图2中,*z*为微凸 体高度,*d*为微凸体的平均高度与刚性平面间的分离 距离(微凸体变形量为ω=*z*-*d*),*h*为粗糙表面平均高 度与刚性平面之间的距离,*y*<sub>s</sub>为微凸体平均高度与粗 糙表面平均高度的距离.

假设φ(z)dz为微凸体的高度分布函数,并且服从 高斯分布.由此根据Hertz接触理论可知,微凸体的总 数量N为

$$N = \eta A_{\rm n} \tag{8}$$

上式中:η为微凸体的面密度函数;A<sub>n</sub>为名义接触面积. 当单个微凸体的变形量ω>0,即z>d时,微凸体将发



Fig. 2 Contact of rough surfaces 图 2 粗糙表面间的接触

生接触,发生接触的微凸体数量n为

$$n = N \int_{d}^{\infty} \phi(z) \mathrm{d}z \tag{9}$$

根据式(1~2),总的接触面积A以及总的接触载荷 F分别为

$$A = \pi NR \int_{d}^{\infty} (z - d) \phi(z) dz$$
 (10)

$$F = \frac{4}{3}NER^{\frac{1}{2}} \int_{d}^{\infty} (z-d)^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz$$
(11)

GW模型的提出为粗糙表面间的接触问题提供了 新的建模思路,此后半个多世纪以来,不断有学者对 GW模型进行修正和改进.尽管GW模型是最被人们熟 知和使用的接触模型<sup>[7]</sup>,但是GW模型仍然因为存在以 下4个方面的问题而被许多学者批评:

(1) GW模型中假设所有微凸体的曲率半径R都相等. 该假设不论是对于自然表面还是工程表面都是不太可能出现的.

(2) GW模型中没有考虑微凸体的非弹性变形状态.

(3) GW模型中忽略了微凸体之间的相互作用.

(4) GW模型没有考虑粗糙表面的多尺度特性.

### 2.1 变曲率半径的统计接触模型

针对GW模型的第一点不足,Whitehouse和Archard<sup>[55]</sup> 基于各向同性、高斯分布和自相关函数为指数函数形 式3个基本假设,研究了微凸体高度与曲率半径的相 关性及其联合分布概率密度,并且在GW模型的基础 上建立了WA模型.Onions和Archard<sup>[56]</sup>利用文献[55] 中提出的微凸体高度和曲率半径的联合概率密度函 数,建立了粗糙表面间的接触模型(OA模型),对随机 表面的接触问题进行研究.Greenwood<sup>[57]</sup>提出了粗糙 表面接触的简化椭圆模型,该模型中微凸体曲率半径 不再为固定值,微凸体高度ξ₀与曲率半径g₀的联合概 率密度函数为

$$\phi_0(\xi_0, g_0) = \frac{9}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} g_0^3 \operatorname{erfc} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\alpha - 1}{2(2\alpha - 3)}} \left( 3g_0 - \frac{\xi_0 \sqrt{\alpha}}{\alpha - 1} \right) \right] \exp\left( -\frac{\alpha {\xi_0}^2}{2(\alpha - 1)} + \frac{3}{2} {g_0}^2 \right)$$
(12)

上式中: *a*为Nayak's指数. 由此确定的粗糙表面微凸体发生弹性变形时的真实接触面和接触载荷为

$$A = \pi \iint \phi_0(\xi_0, g_0) \frac{z - d}{k_g} \mathrm{d}\xi_0 \mathrm{d}g_0 \tag{13}$$

$$F = \frac{4}{3}E \iint \phi_0(\xi_0, g_0) \frac{(z-d)^{\frac{3}{2}}}{k_{\rm g}^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}\xi_0 \mathrm{d}g_0 \tag{14}$$

式(13~14)中:  $k_g = g_0 / \sqrt{m_4} (m_4 \text{可通过表面轮廓的均方$  $根曲率 <math>\sigma_k x$ 出:  $\sigma_k = \sqrt{m_4}$ ). 2009年, Carbone<sup>[58]</sup>基于 GW模型提出了改进模型(SCGW), SCGW模型相对于 原始GW模型的主要修正为允许GW模型中微凸体顶 端的曲率半径取决于表面微凸体的最大高度. 2019年, Tomota和Kondoh等<sup>[30]</sup>利用Johnson分布代替 高斯分布来表示粗糙表面微凸体的高度和曲率,转换 后微凸体的高度 $\xi$ 和曲率半径g的表达式分别为

$$\xi = \begin{cases} \zeta + \lambda \sinh\left(\frac{\xi_0 - \gamma}{\delta'}\right) (JSU) \\ + \frac{\lambda \exp\left(\frac{\xi_0 - \gamma}{\delta'}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\xi_0 - \gamma}{\delta'}\right)} (JSB) \end{cases}$$
(15)

$$g = \frac{\Delta\xi}{\Delta z}R\tag{16}$$

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta\xi_{0}} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\xi_{0}} = \begin{cases} \frac{\lambda \cosh\left(\frac{\xi_{0}-\gamma}{\delta'}\right)}{\delta'} (\mathrm{JSU}) \\ \frac{\lambda \exp\left(\frac{\xi_{0}-\gamma}{\delta'}\right)}{\delta' \left[1+\exp\left(\frac{\xi_{0}-\gamma}{\delta'}\right)\right]^{2}} (\mathrm{JSB}) \end{cases}$$
(17)

式(15~17)中; $h = \frac{d}{\sigma}$ ,为膜厚比( $\sigma$ 为均方根粗糙度); $\gamma$ 、  $\delta$ 、 $\lambda$ 和 $\zeta$ 为Johnson分布的分布参数,由Johnson分布的 偏度和峰度的组合决定.在此基础上,根据GW模型中 计算弹性真实接触面和接触载荷的思路,得到的真实 接触面积A以及总的接触载荷F分别为

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{3}} A_n \iint \frac{\langle \xi - h \rangle}{g} \phi_0(\xi_0, g_0) \mathrm{d}\xi_0 \mathrm{d}g_0 \qquad (18)$$

$$F = \frac{2\alpha^{\frac{3}{4}}}{9\sqrt{3\pi}}\Omega A_{n} \iint \frac{\langle \xi - h \rangle^{\frac{3}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} \phi_{0}(\xi_{0}, g_{0}) \mathrm{d}\xi_{0} \mathrm{d}g_{0} \qquad (19)$$

式(18~19)中, Ω为BGT参数.

## 2.2 考虑微凸体弹塑性变形的统计接触模型

GW模型中主要讨论了粗糙表面在接触过程中, 微凸体发生弹性变形的情况.事实上,除了弹性变形, 微凸体还会发生弹塑性变形以及完全塑性变形<sup>[20]</sup>.针 对GW模型的第二点不足,Chang和Etsion<sup>[59]</sup>等(CEB模 型)将微凸体的变形阶段分为弹性变形和塑性变形, 并根据压缩前后微凸体体积守恒原则,给出了单个微 凸体发生塑性变形时的接触面积*a*<sub>p</sub>和接触载荷*f*<sub>n</sub>:

$$a_{\rm p} = \pi R \omega \left( 2 - \frac{\omega_{\rm c}}{\omega} \right) \tag{20}$$

$$f_{\rm p} = \pi R \omega \left( 2 - \frac{\omega_{\rm c}}{\omega} \right) K H \tag{21}$$

式(20~21)中: $\omega_{c} = \left(\frac{\pi KH}{2E}\right)^{2} R$ ,为微凸体发生初始屈服时的变形量:*KH*为所有发生非弹性变形的微凸体的平均压力(通常认为,平均接触压力 $p_{a} = 0.4H$ ,即最大接触压力 $p_{m} = 0.6H$ 时,微凸体发生初始屈服<sup>[48]</sup>;*K* = 0.454+0.41 $\nu$ ).随后,根据GW模型中关于总的接触面积和接触载荷的计算思路,Chang和Etsion等给出了CEB模型中的接触面积和接触载荷:

$$A = A_e + A_p = \eta A_n \pi R \int_d^{d+\omega_c} (z - d) \phi(z) dz + \eta A_n \pi R \int_{d+\omega_c}^{\infty} [2(z - d) - \omega_c] \phi(z) dz$$
(22)

$$F = \eta A_{n} E \left\{ \frac{4}{3} R^{\frac{1}{2}} \int_{d}^{d+\omega_{c}} (z-d)\phi(z)dz + \pi R K \frac{H}{E} \int_{d+\omega_{c}}^{\infty} [2(z-d)-\omega_{c}]\phi(z)dz \right\}$$
(23)

上式中:*A*<sub>e</sub>和*A*<sub>p</sub>分别为发生弹性变形和发塑性变形的接触面积.

但是,CEB模型中忽略了微凸体弹性变形和塑性 变形的中间状态—弹塑性变形,导致临界点处不连 续,从而出现阶跃的现象<sup>[60]</sup>.Zhao和Maietta等<sup>[23]</sup>基于 CEB模型,利用对数函数和4阶多项式函数分别模拟 了微凸体发生弹塑性变形时,平均接触压力以及接触 面积和微凸体变形量的关系,从而将微凸体的变形分 为弹性变形、弹塑性变形和塑性变形3个阶段,并在此 基础上建立了粗糙表面间的接触模型(ZMC模型). ZMC模型中,总的实际接触面积和接触载荷分别为

$$A = A_{e} + A_{p} + A_{ep} = \eta A_{n} \pi R \int_{d}^{d+\omega_{1}} \omega \phi(z) dz + 2\eta A_{n} \pi R \int_{d+\omega_{2}}^{\infty} \omega \phi(z) dz + \eta A_{n} \pi R \times \int_{d+\omega_{1}}^{d+\omega_{2}} \omega \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega - \omega_{1}}{\omega_{2} - \omega_{1}} \right)^{3} + 3 \left( \frac{\omega - \omega_{1}}{\omega_{2} - \omega_{1}} \right)^{2} \right] \phi(z) dz \quad (24)$$

$$F = F_{e} + F_{p} + F_{ep} = \frac{4}{3} \eta A_{n} E R^{\frac{1}{2}} \int_{d}^{d+\omega_{1}} \omega^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz + 2\eta A_{n} \pi H R \int_{d+\omega_{2}}^{\infty} \omega \phi(z) dz + \eta A_{n} \pi R \int_{d+\omega_{1}}^{d+\omega_{2}} \left[ H - H (1 - K) \frac{\ln \omega_{2} - \ln \omega}{\ln \omega_{2} - \ln \omega_{1}} \right] \times \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega - \omega_{1}}{\omega_{2} - \omega_{1}} \right)^{3} + 3 \left( \frac{\omega - \omega_{1}}{\omega_{2} - \omega_{1}} \right)^{2} \right] \omega \phi(z) dz \quad (25)$$

式(24~25)中, A<sub>ep</sub>、F<sub>ep</sub>分别为发生弹塑性变形的微凸体的接触面积和接触载荷的总和; ω<sub>1</sub>、ω<sub>2</sub>分别为微凸体发生初始屈服时的临界变形量以及完全塑性变形的

时临界变形量. Kogut和Etsion<sup>[61]</sup>(KE模型)根据文献 [34]中,对单个微凸体与刚性平面的有限元仿真结果, 将微凸体的变形分为4个阶段,即弹性变形、第一弹塑 性阶段、第二弹塑性阶段和完全塑性阶段,4个变形阶 段对应的临界变形量分别为

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_{\rm c}} = 1\\ \frac{\omega}{\omega_{\rm c}} = 6\\ \frac{\omega}{\omega_{\rm c}} = 110 \end{cases}$$
(26)

即当 $0 < \frac{\omega}{\omega_c} < 1$ 时, 微凸体发生弹性变形; 当 $1 \le \frac{\omega}{\omega_c} \le 6$ 时, 微凸体发生第一弹塑性变形; 当 $6 \le \frac{\omega}{\omega_c} \le 110$ 时, 微凸体发生第二弹塑性变形; 当 $\frac{\omega}{\omega_c} > 110$ 时, 微凸体发生完全塑性变形. 之后, Kogut和Etsion将以上结论融入GW模型中, 得到的总的接触面积和接触载荷分别为

$$A^{*} = \frac{A}{A_{n}} = \pi R \omega_{c}^{*} \left( \int_{d^{*}}^{d^{*} + \omega_{c}^{*}} I^{1} + 0.93 \int_{d^{*} + \omega_{c}^{*}}^{d^{*} + 6\omega_{c}^{*}} I^{1.136} + 0.94 \int_{d^{*} + 6\omega_{c}^{*}}^{d^{*} + 110\omega_{c}^{*}} I^{1.146} + 2 \int_{d^{*} + 110\omega_{c}^{*}}^{\infty} I^{1} \right)$$
(27)

$$I^{\alpha} = \left(\frac{z^* - d^*}{\omega_c^*}\right)^{\alpha} \phi^*(z^*) \mathrm{d}z^*$$
(28)

$$F^{*} = \frac{F}{A_{n}E} = \frac{2}{3}\pi R K \frac{H}{E} \omega_{c}^{*} \left( \int_{d^{*}}^{d^{*} + \omega_{c}^{*}} I^{1.5} + 1.03 \int_{d^{*} + \omega_{c}^{*}}^{d^{*} + 6\omega_{c}^{*}} I^{1.425} + 1.4 \int_{d^{*} + 6\omega_{c}^{*}}^{d^{*} + 110\omega_{c}^{*}} I^{1.263} + \frac{3}{K} \int_{d^{*} + 110\omega_{c}^{*}}^{\infty} I^{1} \right)$$
(29)

式(27~29)中:带"\*"变量为利用表面高度标准差 进行无量纲化之后的结果.

Jackson和Green<sup>[32]</sup>建立了单个微凸体与刚性光滑 平面接触的有限元模型,结果表明,在小载荷条件下, 即微凸体的变形量较小时,接触面积、接触载荷随变 形量的变化规律与Hertz弹性接触理论基本一致,当变 形量为0  $\leq \frac{\omega}{\omega_c} \leq 1.9$ 时,微凸体的接触面积和接触载 荷为

$$a_{\rm JG} = \pi R \omega \left(\frac{\omega}{1.9\omega_{\rm c}}\right)^B \tag{30}$$

$$f_{\rm JG} = f_{\rm c} \left\{ \left[ \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_{\rm c}}\right)^{\frac{5}{12}}\right) \right] \left(\frac{\omega}{\omega_{\rm c}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4H_{\rm G}}{CS_{\rm y}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{25} \left(\frac{\omega}{\omega_{\rm c}}\right)^{\frac{5}{9}}\right) \right] \frac{\omega}{\omega_{\rm c}} \right\}$$
(31)

$$B = 0.14 \exp(23\frac{S_y}{E}) \tag{32}$$

$$\frac{H_{\rm G}}{S_{\rm y}} = 2.84 \left[ 1 - \exp\left(-0.82 \left(\sqrt{\frac{\omega}{R}} \left(\frac{\omega}{1.9\omega_{\rm c}}\right)^{\frac{B}{2}}\right)^{-0.7}\right) \right] \quad (33)$$

式 (30~33)中:  $S_y$ 为 材 料 的 屈 服 强 度; C = 1.295 exp(0.763v)(v为泊松比);  $f_c$ 为微凸体发生初始屈服时 的临界接触载荷. Jackson和Green<sup>[62]</sup>基于以上结论, 在 GW模型的基础上, 推导并建立了粗糙表面间的接触 模型(JG模型).

2019年, Wang和Zhang等<sup>[31]</sup>对单个微凸体的弹塑 性变形行为, 采用改进的hermit插值方法, 使其在弹塑 性区的开始和结束处具有连续性和光滑性. 通过将接 触行为和接触干扰转化为对数坐标, 来减小多项式插 值的波动效应. 之后, 结合Hertz弹性接触理论和式 (5~7)对于完全塑性变形时接触面积和接触载荷的计 算, 在GW模型的基础上推导建立了新的粗糙表面接 触模型.

最近, Zhao和Li等<sup>[63]</sup>将单个微凸体的变形分为弹 性变形、弹塑性变形和完全塑性变形3个阶段,并在此 基础上,将弹塑性变形阶段又细分为前弹塑性变形、 中弹塑性变形和后弹塑性变形3个阶段:

 $\begin{cases} \omega_{c} \leq \omega \leq 6\omega_{c}, & 前弹塑性变形 \\ 6\omega_{c} \leq \omega \leq 76.4\omega_{c}, & 中弹塑性变形 \\ 76.4\omega_{c} \leq \omega \leq 110\omega_{c}, & 后弹塑性变形 \end{cases}$ (34)

之后,以Hertz理论描述微凸体的弹性变形,以式 (5~7)表示微凸体的塑性变形,参考GW模型关于计算 总的实际接触面积和接触载荷的思路,建立了新的粗 糙表面接触模型.

2.3 考虑微凸体相互作用的统计接触模型

针对GW模型的第三点不足,许多学者在如何考

虑粗糙表面接触时微凸体的相互作用方面,也进行了 大量探索.Zhao和Chang<sup>[64]</sup>提出了如图3所示的模型, *u*<sub>m</sub>为微凸体平均高度的位移量,*u*<sub>g</sub>为其他微凸体的压 力引起的变形,δ为单个微凸体的总变形量.图3中其 余变量的物理意义与图2中的相同.

由图3可知有下列关系式成立:

$$\delta = \omega + u_{\rm g} \tag{35}$$

$$d + \delta = d + \omega + u_{g} = z + u_{m}$$
(36)

根据式(35~36)可知:

$$\omega = z - d + (u_{\rm m} - u_{\rm g}) \tag{37}$$

将式(37)与GW中微凸体的变形 $\omega = z - d$ 进行比较可知,  $(u_m - u_g)$ 反映的是由于相互作用对微凸体变形的影响程度. Zhao和Chang进一步假设每一个微凸体的基底面积 $a_i$ 与其所承受的载荷 $f_i$ 成正比关系:

$$a_1 = \lambda f_1 \tag{38}$$

因为基底面积的总和与名义面积相等,即:

$$\sum a_{\rm l} = A_{\rm n} \tag{39}$$

于是:

$$\lambda = \frac{A_{\rm n}}{\sum f_{\rm l}} = \frac{A_{\rm n}}{F} = \frac{l}{P_{\rm a}} \tag{40}$$

式(40)中P<sub>a</sub>为整个粗糙表面的平均接触压力. 假设基 底为正方形, 边长为2*l*, 则*l*为

$$l = \frac{1}{2}a_l^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{f_l}{P_a}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(41)

根据Love公式以及式(41)可得:

$$u_{\rm m} - u_{\rm g} = \frac{4\sqrt{f_{\rm l}P_{\rm a}}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\pi E} = 1.12\frac{\sqrt{f_{\rm l}P_{\rm a}}}{E} \tag{42}$$

则式(37)变为



Fig. 3 Contact of a rough surface with a rigid smooth flat 图 3 刚性光滑平面与粗糙表面的接触

$$\omega = z - d + 1.12 \frac{\sqrt{f_1 P_a}}{E} \tag{43}$$

将上述结论应用于ZMC模型中,Zhao和Chang建 立了考虑微凸体相互作用的统计接触模型.

Ciavarella和Greenwood等<sup>[65]</sup>假设在较大载荷下, 接触压力均匀分布在粗糙表面上,并且由此产生的变 形也是均匀分布的.根据Timoshenko和Goodier<sup>[19]</sup>的理 论,当名义接触压力为 $P_{nom}$ 时,作用在名义面积 $A_n$ 上的 所产生的变形为 $\frac{mP_{nom}\sqrt{A_n}}{E}$ (对于Hertz接触, m = 1),因 此,微凸体的高度将由GW模型中的z变为z –  $\frac{P_{nom}\sqrt{A_n}}{E}$ , 考虑微凸体相互作用的微凸体的变形量为

$$\omega = z - \frac{P_{\text{nom}}\sqrt{A}}{E} - d \tag{44}$$

式(44)中, Pnom可用迭代法求出, 其表达式为

$$P_{\text{nom}} = \frac{4}{3} \eta E R^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}} \left( \frac{d}{\sigma} + \frac{P_{\text{nom}} \sqrt{A}}{E\sigma} \right)$$
(45)

式(45)中,  $F_{\frac{3}{2}}(h)$ 的表达式为

$$F_{\frac{3}{2}}(h) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{h}^{\infty} (s-h)^{\frac{3}{2}} \exp(-0.5s^{2}) \mathrm{d}s$$
(46)

将式(44~46)代入GW模型中,在文献[65]中基于 GW模型建立了考虑微凸体相互作用的粗糙表面接触 模型.

另外,文献[66-68]中考虑了当微凸体相互错位, 产生"肩并肩"接触时对粗糙表面接触特性的影响,如 图4所示. Afferrantehe和Carbone等<sup>[69]</sup>考虑了粗糙表面 在相互接近时,微凸体在横向上的相互作用以及"聚 合"现象,对GW模型进行了修正.



Fig. 4 Contact of rough surfaces considering asperity interaction 图 4 微凸体的相互作用

#### 2.4 多尺度接触模型

统计接触模型的优点是能够生成大量具有统计

参数的粗糙表面,有利于分析不同特征表面的回归公 式和接触特性的原始数据.然而,由于粗糙表面具有 随机性和不平稳性,导致表面形貌的统计参数对确定 的表面往往具有不确定性,所以建立的粗糙表面接触 模型对接触特性的预测结果也就不是唯一的,这是由 于粗糙表面形貌具有多尺度特性,而在一定的测量条 件下得到的统计学表征参数并不能够反映表面粗糙 度的全部信息,表现出对仪器分辨率和取样长度的 依赖<sup>[70-72]</sup>.

粗糙表面具有多尺度特性,将其无限放大,更多 更小的细节会显现出来<sup>[3,5]</sup>,Greenwood和Williamson 在建模过程中并没有考虑粗糙表面的这种多尺度特 性,这也是GW模型经常被其他学者提到的缺点之一. 第一个粗糙表面的多尺度接触模型是由Archard<sup>[73]</sup>提 出的,Archard模型中假设较小的微凸体堆叠在较大的 微凸体上,以此来刻画表面的多尺度特性,建立了弹 性变形范围内的多尺度接触模型,该模型的提出甚至 早于GW模型,后续又有学者对Archard模型进行了完 善和扩展<sup>[74-76]</sup>.文献[77-78]中的多尺度接触模型的建 模思路与Archard模型相同,文献[77]中的多尺度模型 还考虑了微凸体的弹塑性变形.也有学者称这类模型 为"叠层多尺度模型"<sup>[7]</sup>,模型假设不同尺度上微凸体 的总载荷相同,同一尺度上微凸体的载荷相同,由此 得到的实际接触面积和接触载荷为

$$A = \left(\prod_{i=1}^{i_{\max}} \overline{a_i} \eta_i\right) A_n \tag{47}$$

$$F = \overline{f_i} \eta_i A_{i-1} \tag{48}$$

式(47~48)中,  $\overline{a_i}$ 和 $\overline{f_i}$ 分别为尺度*i*上单个微凸体的接触 面积和接触载荷;  $A_i$ 为某一尺度上微凸体的总接触面 积;  $\eta_i$ 为微凸体密度. 另外,还有其他学者利用类似的 建模思想, 对粗糙表面的多尺度建模进行了尝试和 探索<sup>[79-81]</sup>.

文献[25,82]中假设粗糙面为分形表面,建立了多 尺度的接触模型.事实上,为了在建模过程中考虑多 尺度特性,更多学者选择基于分形理论来建立接触模 型<sup>[82-85]</sup>,相较于统计接触模型,基于分形理论的接触模 型对接触面进行分形描述,这本身就能够反映粗糙表 面的多尺度特性.

Wilson等<sup>[86-87]</sup>利用"叠层多尺度模型"的思想,基于GW模型提出了粗糙面的多尺度接触模型,该模型中,引入了文献[88]中关于微凸体变形的结论,将微凸体的变形分为完全弹性变形和弹塑性变形.Beheshti

和Khonsari<sup>[89-90]</sup>考虑了较大尺度上微凸体的曲率半径 对弹塑性接触的影响,建立了多尺度的统计接触模型. 另外,也有学者考虑将统计分析和分析理论结合起来 建立多尺度的接触模型<sup>[91-92]</sup>.

# 3 未来研究方向

(1)纳观粗糙表面统计接触模型.随着纳米加工 技术的进步,零部件的尺寸进入到纳米尺度,此时,材 料的宏观尺寸与变形载体的特征尺度处于同一量级, 材料的力学性能将呈现出强烈的微尺度效应.如何在 今后的建模工作中考虑材料力学行为的尺度效应,是 统计接触模型未来的重要研究方向之一.

(2)考虑材料基体塑性应变的统计接触模型.当前,针对粗糙表面的接触建模,基本都没有考虑材料 基体的塑性应变对微凸体变形行为的影响,而在工程 实际中,基体的塑性应变在金属件的塑性成形中几乎 是不可避免的.有研究表明,基体的塑性应变将会大 大降低微凸体的有效硬度.在塑性成形的粗糙表面的 统计接触模型中,考虑基体的塑性应变,对于提高表 面品质控制意义重大.

(3)考虑多个界面现象的统计接触模型.大部分 接触模型通常只考虑单个或者两个单独的界面现象, 如微凸体的相互作用、材料的热弹塑性以及载荷的非 均匀分布等.为了获得更加贴近实际情况的模拟结 果,有必要在建模过程中同时考虑多个界面现象,对 不同因素之间的耦合效果进行分析.

#### 4 总结

统计接触模型是较早通过数值建模来反映粗糙 表面接触状态、研究其接触特性的模型之一,GW模型 是统计接触模型的代表,奠定了统计接触模型的发展 基础.GW模型的主要缺点包括:假设所有微凸体的曲 率半径都相等;没有考虑微凸体的弹塑性变形状态; 忽略了微凸体之间的相互作用;没有考虑粗糙表面的 多尺度特性.后续学者针对GW模型的缺陷做了许多 更加贴近工程实际的改进,使得统计接触模型日趋成 熟和完善.值得注意的是,随着学者们对GW模型的改 进和完善,使得以GW模型为代表的统计接触模型中 考虑的影响因素越来越多,统计接触模型的预测精度 也得到了改善,但同时也使得统计接触模型变得越来 越复杂,在此过程中统计接触模型逐渐失去了其表达 上的简洁性以及计算上的高效性.

本文作者首先总结了粗糙表面接触建模的思路,

阐述了接触模型目前存在的问题和挑战,然后对以 GW模型为代表的统计接触模型的研究现状和最新进 展进行介绍,最后对统计接触模型未来可能的研究方 向进行了展望.这些总结和探索将为后续的相关研究 提供借鉴和参考.

### 参考文献

- [1] Xiao Huifang, Sun Yunyun, Xu Jinwu. An elastoplastic contact model for rough surface contact with continuous and smooth stiffness[J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2019, 50(6): 1343–1350 (in Chinese) [肖会芳, 孙韵 韵, 徐金梧. 刚度连续、单调且光滑变化的粗糙界面法向弹塑性接 触模型[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2019, 50(6): 1343–1350]. doi: 10.11817/j.issn.1672-7207.2019.06.011.
- [2] Carpick R W. The contact sport of rough surfaces[J]. Science, 2018, 359(6371): 38. doi: 10.1126/science.aaq1814.
- [3] Chen Z, Liu Y, Zhou P. A novel method to identify the scaling region of rough surface profile[J]. Fractals, 2019, 27(2): 1950011. doi: 10.1142/S0218348X19500117.
- [4] Ji Cuicui, Zhu Hua. Research progress on M-B fractal contact model[J]. Lubrication Engineering, 2011, 36(9): 114 –119 (in Chinese) [姬翠翠, 朱华. 粗糙表面分形接触模型的研究进展 [J]. 润滑与密封, 2011, 36(9): 114–119]. doi: 10.3969/j.issn.0254-0150.2011.09.027.
- [5] Chen Z, Liu Y, Zhou P. A comparative study of fractal dimension calculation methods for rough surface profiles[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 112: 24–30.
- [6] Ding Xuexing, Yan Ruqi, Jia Yonglei. Construction and analysis of fractal contact mechanics model for rough surface based on base length[J]. Tribology, 2014, 34(4): 341–347 (in Chinese) [丁雪兴, 严 如奇, 贾永磊. 基于基底长度的粗糙表面分形接触模型的构建与 分析[J]. 摩擦学学报, 2014, 34(4): 341–347].
- Ghaednia H, Wang X, Saha S, et al. A review of elastic-plastic contact mechanics[J]. Applied Mechanics Reviews, 2017, 69(6): 60804. doi: 10.1115/1.4038187.
- [8] Yuan Yuan, Chen Yu, Zhang Jing. Fractal based elastoplastic mechanics model for contact with rough surface and its experimental verification[J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(6): 209 –221 (in Chinese) [原园, 成雨, 张静. 基于分形的三维粗糙表面弹塑性 接触力学模型与试验验证[J]. 工程力学, 2018, 35(6): 209–221].
- [9] Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: Single asperity contact[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(5): 257–298.
- [10] Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact[J]. Tribology Letters, 1998, 4: 1–35. doi: 10.1023/A:1019186601445.
- [11] Liu G, Jane Wang Q, Lin C. A survey of current models for simulating the contact between rough surfaces[J]. Tribology

Transactions, 1999, 42(3): 581-591. doi: 10.1080/104020099089 82257.

- [12] Adams G G, Nosonovsky M. Contact modeling-forces[J]. Tribology International, 2000, 33(5-6): 431 –442. doi: 10.1016/S0301-679X(00)00063-3.
- [13] Barber J R, Ciavarella M. Contact mechanics[J]. International Journal of Solids & Structures, 2000, 37(1): 29–43.
- [14] Wei Long, Gu Boqin, Feng Fei, et al. Progress of study on contact models of rough surfaces[J]. Lubrication Engineering, 2009, 34(7): 112–117 (in Chinese) [魏龙, 顾伯勤, 冯飞, 等. 粗糙表面接触模型 的研究进展[J]. 润滑与密封, 2009, 34(7): 112–117]. doi: 10.3969/j.issn.0254-0150.2009.07.028.
- [15] Hu Zhaowen, Liu Kun, Wang Wei, et al. Review and prospect of contact models of rough surfaces[J]. Cryogenics & Superconductivity, 2011, 39(12): 71–74 (in Chinese) [胡兆稳, 刘焜, 王伟,等. 粗糙表面接触模型的研究现状和展望[J]. 低温与超导, 2011, 39(12): 71–74]. doi: 10.3969/j.issn.1001-7100.2011.12.017.
- [16] Müser M H, Dapp W B, Bugnicourt R, et al. Meeting the contactmechanics challenge[J]. Tribology Letters, 2017, 65(4): 118. doi: 10.1007/s11249-017-0900-2.
- [17] He Lin, Zhu Jun. Presentation and development of fractal contact model for rough surfaces[J]. Tribology, 1996, 16(4): 88 –97 (in Chinese) [贺林,朱均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展 [J]. 摩擦学学报, 1996, 16(4): 88–97].
- [18] Chen Guoan, Ge Shirong, Zhang Xiaoyun. Fractal geometry and the advances in tribology[J]. Lubrication Engineering, 1999, (5): 69–71 (in Chinese) [陈国安, 葛世荣, 张晓云. 分形几何与摩擦学进展[J]. 润 滑 与 密 封, 1999, (5): 69–71]. doi: 10.3969/j.issn.0254-0150.1999.05.026.
- [19] Timoshenko S, Goodier J N. Theory of elasticity: 2nd ed[M]. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [20] Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987.
- Yan W, Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7): 3617–3624. doi: 10.1063/1.368536.
- [22] Chen Z, Etsion I. The elastic-plastic contact behavior of rough surfaces with hard coatings[J]. Tribology International, 2019, 134: 435–442. doi: 10.1016/j.triboint.2019.02.025.
- [23] Zhao Y, Maietta D M, Chang L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow[J]. Journal of Tribology, 2000, 122(1): 86 –93. doi: 10.1115/1.555332.
- [24] Sainsot P, Jacq C, Nelias D. A numerical model for elastoplastic rough contact[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2002, 3(4): 497–506.
- [25] Gao Y F, Bower A F. Elastic-plastic contact of a rough surface with weierstrass profile[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences, 2006, 462(2065):

319-348.

- [26] Wang Z, Liu X. Model for elastic –plastic contact between rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 2018, 140(5): 51402. doi: 10.1115/1.4040385.
- [27] An B, Wang X, Xu Y, et al. Deterministic elastic-plastic modelling of rough surface contact including spectral interpolation and comparison to theoretical models[J]. Tribology International, 2019, 135: 246–258. doi: 10.1016/j.triboint.2019.02.039.
- [28] Guo J, He P, Liu Z, et al. Investigation of an improved planar revolute clearance joint contact model with rough surface[J]. Tribology International, 2019, 134: 385 –393. doi: 10.1016/j.triboint.2019.02.019.
- [29] Esfahani H A, Akbarzadeh S, Kadkhodaei M. Numerical and experimental study on the effect of considering plastic and elastoplastic deformation of each asperity in dry contact of rough surfaces[J]. Surface Topography: Metrology and Properties, 2019, 7(2): 25021. doi: 10.1088/2051-672X/ab2748.
- [30] Tomota T, Kondoh Y, Ohmori T. Modeling solid contact between smooth and rough surfaces with non-gaussian distributions[J]. Tribology Transactions, 2019, 62(4): 580–591. doi: 10.1080/10402004. 2019.1573341.
- [31] Wang D, Zhang Z, Jin F, et al. Normal contact model for elastic and plastic mechanics of rough surfaces[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2019, 32(2): 148–159. doi: 10.1007/s10338-018-0066-y.
- [32] Jackson R L, Green I. A finite element study of elastoplastic hemispherical contact against a rigid flat[J]. Journal of Tribology, 2005, 127(2): 343–354. doi: 10.1115/1.1866166.
- [33] Shankar S, Mayuram M M. Effect of strain hardening in elastic-plastic transition behavior in a hemisphere in contact with a rigid flat[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45(10): 3009–3020. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.01.017.
- [34] Kogut L, Etsion I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat[J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 67(5): 657–662.
- [35] Etsion I, Kligerman Y, Kadin Y. Unloading of an elastic-plastic loaded spherical contact[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(13): 3716–3729. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.12. 006.
- [36] Quicksall J J, Jackson R L, Green I. Elasto-plastic hemispherical contact models for various mechanical properties[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2005, 218(4): 313–322.
- [37] Shankar S, Mayuram M M. A finite element based study on the elastic-plastic transition behavior in a hemisphere in contact with a rigid flat[J]. Journal of Tribology, 2008, 130(4): 44502. doi: 10.1115/1.2958081.
- [38] Zait Y, Kligerman Y, Etsion I. Unloading of an elastic-plastic spherical contact under stick contact condition[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(7-8): 990–997. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.12.014.

405

- [39] Wadwalkar S S, Jackson R L, Kogut L. A study of the elastic —plastic deformation of heavily deformed spherical contacts[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2010, 224(10): 1091–1102. doi: 10.1243/13506501JET763.
- [40] Chung J C. Elastic–plastic contact analysis of an ellipsoid and a rigid flat[J]. Tribology International, 2010, 43(1): 491–502.
- [41] Chatterjee B, Sahoo P. Effect of strain hardening on elastic-plastic contact of a deformable sphere against a rigid flat under full stick contact condition[J]. Advances in Tribology, 2012, 2012: 1–8.
- [42] Chatterjee B, Sahoo P. Finite-element-based multiple normal loading-unloading of an elastic-plastic spherical stick contact[J]. International Scholarly Research Notices Tribology Tribology, 2014, 2013(1): 1–13.
- [43] Megalingam A, Mayuram M M. A comprehensive elastic-plastic single-asperity contact model[J]. Tribology Transactions, 2014, 57(2): 324–335. doi: 10.1080/10402004.2013.877179.
- [44] Liu M. Finite element analysis of large contact deformation of an elastic-plastic sinusoidal asperity and a rigid flat[J]. International Journal of Solids & Structures, 2014, 51(21-22): 3642–3652.
- [45] Liu M, Proudhon H. Finite element analysis of contact deformation regimes of an elastic-power plastic hardening sinusoidal asperity[J]. Mechanics of Materials, 2016, 103: 78 –86. doi: 10.1016/j.mechmat.2016.08.015.
- [46] Jackson R L, Liu H, Leray D. A comparison of the predictions of a finite element model and multiscale model for a rough MEMS electrical contact: 59th IEEE holm conference on electrical contacts[C]. Newport, Rhode Island, USA, 2013.
- [47] Jackson R L, Kogut L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts[J]. Journal of Tribology, 2006, 128(1): 209 –212. doi: 10.1115/1.2114948.
- [48] Tabor D. The hardness of metals[M]. New York: Oxford University Press, 2000.
- [49] Abbott E, FA F. Specifying surface quality: a method based on accurate measurement and comparison[J]. Mechanical Engineering ASME, 1933, 55(7): 569–572.
- [50] Wang Qingpeng, Zhang Li, Du Baocheng, et al. Re-definition of asperity-peak for deterministic contact model on rough surfaces[J]. Journal of Xi 'an Jiaotong University, 2016, 50(11): 115-120 (in Chinese) [王庆朋, 张力, 杜宝程, 等. 粗糙表面确定性接触模型 中峰的再定义[J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(11): 115-120]. doi: 10.7652/xjtuxb201611018.
- [51] Sun Jianjun, Ji Zhengbo, Ma Chenbo. Reanalysis of the contact mechanics for rough surfaces[J]. Chinese of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(1): 68–77 (in Chinese) [孙见君, 嵇正波, 马晨 波. 粗糙表面接触力学问题的重新分析[J]. 力学学报, 2018, 50(1): 68–77]. doi: 10.6052/0459-1879-17-272.
- [52] Majumdar A A, Bhushan B. Role of Fractal Geometry in Roughness

Characterization and Contact Mechanics of Surfaces[J]. Journal of Tribology, 1990, 112(2): 205–216. doi: 10.1115/1.2920243.

- [53] Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1966, 295(1442): 300–319.
- [54] Lee J, Beheshti A, Polycarpou A A. Rough surface normal nanocontact stiffness: Experimental measurements and rough surface contact model predictions[J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 84(3): 31006.
- [55] Whitehouse D J, Archard J F. The properties of random surfaces of significance in their contact[J]. PProceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1970, 316(1524): 97–121.
- [56] Onions R A, Archard J F. The contact of surfaces having a random structure[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2002, 6(3): 289–304.
- [57] Greenwood J A. A simplified elliptic model of rough surface contact[J]. Wear, 2006, 261(2): 191–200. doi: 10.1016/j.wear.2005. 09.031.
- [58] Carbone G. A slightly corrected greenwood and williamson model predicts asymptotic linearity between contact area and load[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009, 57(7): 1093–1102. doi: 10.1016/j.jmps.2009.03.004.
- [59] Chang W R, Etsion I, Bogy D B. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 1987, 109(2): 257–263. doi: 10.1115/1.3261348.
- [60] Zhao Yongwu, Lv Yanming, Jiang Jianzhong. A new elastoplastic contact model for rough surfaces[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(3): 95–101 (in Chinese) [赵永武, 吕彦明, 蒋 建忠. 新的粗糙表面弹塑性接触模型[J]. 机械工程学报, 2007, 43(3): 95–101]. doi: 10.3321/j.issn:0577-6686.2007.03.016.
- [61] Kogut L, Etsion I. An improved elastic-plastic model for the contact of rough surfaces: 3rd Aimeta International Tribology Conference[C]. Vietri Sul Mare, Salerno, Italy, 2002.
- [62] Jackson, Robert L, Itzhak. A statistical model of elasto-plastic asperity contact between rough surfaces[J]. Tribology International, 2006, 39(9): 906–914. doi: 10.1016/j.triboint.2005.09.001.
- [63] Zhao G, Li S, Xiong Z, et al. A statistical model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2019, 43(1): 38–46. doi: 10.1139/tcsme-2017-0052.
- [64] Zhao Y, Chang L. A model of asperity interactions in elastic-plastic contact of rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 2001, 123(4): 857–864. doi: 10.1115/1.1338482.
- [65] Ciavarella M, Greenwood J A, Paggi M. Inclusion of "interaction" in the greenwood and williamson contact theory[J]. Wear, 2008, 265(5-6): 729–734. doi: 10.1016/j.wear.2008.01.019.
- [66] Sepehri A, Farhang K. Three Dimensional Elastic-plastic Contact of Nominally Flat Rough Surfaces: Approximate Closed-form

Equations: Proceedings of ASME/STLE International Joint Tribology Conference[C]. San Diego, California, USA, 2007.

- [67] Abdo J, Farhang K. Elastic–plastic contact model for rough surfaces based on plastic asperity concept[J]. International Journal of Non-LinearMechanics,2005,40(4):495-506.doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2004. 08.003.
- [68] Sepehri A, Farhang K. On elastic interaction of nominally flat rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 2008, 130(1): 125–128.
- [69] Afferrante L, Carbone G, Demelio G. Interacting and coalescing hertzian asperities: A new multiasperity contact model[J]. Wear, 2012, 278-279: 28–33.
- [70] Zhang X, Jackson R L. An analysis of the multiscale structure of surfaces with various finishes[J]. Tribology Transactions, 2017, 60(1): 121–134. doi: 10.1080/10402004.2016.1152620.
- [71] Chen Y, Liang W, Lian H, et al. Experimental study on the effect of fracture geometric characteristics on the permeability in deformable rough-walled fractures[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2017, 98: 121–140. doi: 10.1016/j.ijrmms. 2017.07.003.
- [72] Panda S, Panzade A, Sarangi M, et al. Spectral approach on multiscale roughness characterization of nominally rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 2017, 139(3): 031402. doi: 10.1115/1.4034215.
- [73] Archard J F. Elastic deformation and the laws of friction[J]. Proceedings of the Royal Society. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1957, 243(1233): 190–205.
- [74] Ciavarella M, Demelio G. Elastic multiscale contact of rough surfaces: Archard's model revisited and comparisons with modern fractal models[J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(3): 496–498. doi: 10.1115/1.1352016.
- [75] Jackson R L. An analytical solution to an Archard-type fractal rough surface contact model[J]. Tribology Transactions, 2010, 53(4): 543–553. doi: 10.1080/10402000903502261.
- [76] Ciavarella M, Murolo G, Demelio G, et al. Elastic contact stiffness and contact resistance for the Weierstrass profile[J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 2004, 52(6): 1247–1265.
- [77] Jackson R L, Streator J L. A multi-scale model for contact between rough surfaces[J]. Wear, 2006, 261(11-12): 1337–1347. doi: 10.1016/ j.wear.2006.03.015.
- [78] Bora C K, Flater E E, Street M D, et al. Multiscale roughness and modeling of MEMS interfaces[J]. Tribology Letters, 2005, 19(1): 37–48. doi: 10.1007/s11249-005-4263-8.
- [79] Jackson R L, Ghaednia H, Elkady Y A, et al. A closed-form multiscale thermal contact resistance model[J]. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, 2012, 2(7): 1158–1171. doi: 10.1109/TCPMT.2012.2193584.
- [80] Angadi S V, Jackson R L, Choe S Y, et al. A multi-physics finite element model of a 35A automotive connector including multiscale rough surface contact[J]. Journal of Electronic Packaging, 2010,

134(1): 1–11.

- [81] Jackson R L, Malucci R D, Angadi S, et al. A Simplified Model of Multiscale Electrical Contact Resistance and Comparison to Existing Closed Form Models: Proceedings of the IEEE Holm Conference on Electrical Contacts[C]. Vancouver, BC, Canada, 2009.
- [82] Goedecke A, Jackson R L, Mock R. A fractal expansion of a three dimensional elastic –plastic multi-scale rough surface contact model[J]. Tribology International, 2013, 59: 230 –239. doi: 10.1016/j.triboint.2012.02.004.
- [83] Ciavarella M, Delfine V, Demelio V. A new 2D asperity model with interaction for studying the contact of multiscale rough random profiles[J]. Wear, 2006, 261(5-6): 556–567. doi: 10.1016/j.wear.2006. 01.028.
- [84] Chen Hongxu, Dong Guanhua, Xie Luofeng, et al. A piecewise calculation model for fractal rough surface contact deformation[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2018, 52(6): 722 –728 (in Chinese) [陈虹旭, 董冠华, 谢罗峰, 等. 分形粗糙表面接触变形 分段计算模型[J]. 上海交通大学学报, 2018, 52(6): 722–728].
- [85] Yuan Y, Cheng Y, Liu K, et al. A revised majumdar and bushan model of elastoplastic contact between rough surfaces[J]. Applied Surface Science, 2017, 425: 1138–1157. doi: 10.1016/j.apsusc.2017. 06.294.
- [86] Wilson W E, Angadi S V, Jackson R L. Electrical contact resistance considering multi-scale roughness: Proceedings of the IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, Orlando, Florida, USA, 2008[C].
- [87] Wilson W E, Angadi S V, Jackson R L. Surface separation and contact resistance considering sinusoidal elastic-plastic multi-scale rough surface contact[J]. Wear, 2010, 268(1-2): 190-201. doi: 10.1016/j.wear.2009.07.012.
- [88] Johnson K L, Greenwood J A, Higginson J G. The contact of elastic regular wavy surfaces[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1985, 27(6): 383–396. doi: 10.1016/0020-7403(85)90029-3.
- [89] Beheshti A, Khonsari M M. Asperity micro-contact models as applied to the deformation of rough line contact[J]. Tribology International, 2012, 52: 61–74. doi: 10.1016/j.triboint.2012.02.026.
- [90] Beheshti A, Khonsari M M. On the contact of curved rough surfaces: Contact behavior and predictive Formulas[J]. Journal of Applied Mechanics, 2014, 81(11): 111004. doi: 10.1115/1.4028426.
- [91] Liou J L, Lin J F. A modified fractal microcontact model developed for asperity heights with variable morphology parameters[J]. Wear, 2010, 268(1-2): 133–144. doi: 10.1016/j.wear.2009.07.003.
- [92] Tian Hongliang, Zhong Xianyou, Zhao Chunhua, et al. One loading model of joint interface considering elastoplastic and variation of hardness with surface depth[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(5): 90–104 (in Chinese) [田红亮, 钟先友, 赵春华, 等. 计 及弹塑性及硬度随表面深度变化的结合部单次加载模型[J]. 机械 工程学报, 2015, 51(5): 90–104]. doi: 10.3901/JME.2015.05.090.