

基于 Hertz 理论圆柱和平面之间的滑动接触分析

冯剑军, 谭援强

(湘潭大学 机械工程学院, 湖南 湘潭 411105)

摘 要: 当圆柱与平面之间产生摩擦滑动接触时, 基于 Hertz 理论, 推导了平面内应力分量的计算公式, 分析了应力的分布, 描述了应力分布的特点. 在接触表面上, 存在最大拉应力和最大压应力; 最大拉应力出现在拖动边的边缘, 而最大压应力发生在导向边的区域. 因此, 如果接触平面因拉或压应力引起失效, 首先会出现在接触表面; 第一型裂纹的产生及扩展首先会发生在拖动边的边缘. 剪应力、主剪应力及 Von - Mises 等效应力 (当摩擦系数较小时) 的最大值均会出现在接触体内, 存在于导向边. 因此, 塑性滑移开始首先会发生在接触体内, 然后, 才扩展到接触表面. 这些结论为工程应用研究提供了依据.

关键词: 摩擦滑动接触; 等效应力; 主应力; 接触压力; 剪切牵引力

中图分类号: O31

文献标识码: A

文章编号: 1004 - 0595 (2009) 04 - 0346 - 05

滑动接触问题是接触力学的基本问题, 在许多工程领域具有广泛的应用, 如机械中元件之间的相互接触, 计算机中磁头与磁盘的接触, 电器中触头开启与闭合等, 尤其是加工中刀具与工件的接触, 超精密抛光加工中抛光粉颗粒与晶片间的接触等, 均涉及到摩擦滑动接触问题. 许多研究者对此进行了深入的研究, 取得了很大的进展^[1-11]. 对弹性体滑动接触问题的分析方法通常有 2 种: 第一种是基于 Hertz 接触理论和 Coulomb 摩擦定律, 其基本观点是小变形, 接触面上的压力服从抛物线分布, 按 Hertz 接触理论确定; 初始滑动时, 切向力的大小和分布服从 Coulomb 摩擦定律, 即为摩擦的极限状态; 建立接触面上的法向变形方程时不考虑法向压力和切向力的耦合作用. 这种方法计算较简单. 其二是建立接触面上的法向和切向变形方程时考虑法向压力和切向力的耦合作用, 需要求解奇异耦合积分方程, 确定法向压力和切向力. 这种方法计算较复杂. Johnson^[1]介绍了滑动接触的研究方法和原理, 他认为按第一种方法计算, 其误差较小; 同时, 他介绍了采用第一种方法计算圆柱和平面之间产生滑动接触时弹性体内应力场的方法, 而对接触体内应力场的分布没有作详细的分析. 当圆柱和半无限平面产生弹性滑动

接触时, 由于材料泊松比 (Poisson ratio) 的作用, 弹性体也会产生沿圆柱轴向的弹性滑动. 如果考虑这种作用, 求解将很复杂, 为了简化求解, 忽略轴向弹性滑动引起的切向力. Qiu^[4]分析了一个圆柱相对于半无限平面斜滑动的情况, 把剪切拖动力分解为轴向和切向两个分力, 把接触区离散为有限个小区, 有效地避免了积分收敛的问题, 分析表明: 轴向滑动对接触面上的应力分布有影响, 但是, 影响较小. 因此, 当一个圆柱相对于半无限平面正交滑动时, 可以忽略材料 Poisson ratio 引起的轴向弹性滑动对平面内应力分布的影响. Kogut, Etsion 等^[5-9]认为弹 - 塑性滑动接触时的摩擦系数与接触压力、材料特性有关; 塑性滑移开始首先会发生在接触体内部, 然后才扩展到接触表面. Vijaywargiya 和 Green^[10]发现有摩擦时两接触体之间的法向作用力与无摩擦时的作用力差别较小. 本文基于 Hertz 接触理论和 Coulomb 摩擦定律, 计算了平面和圆柱产生滑动接触时在半无限平面内的应力场, 绘制了应力的分布曲线图, 并且详细地分析了应力的分布. 所获得的结果有利于准确地判断平面和圆柱产生滑动接触时塑性变形开始的区域、首先出现裂纹和裂纹扩展的位置, 为研究接触体的变形和接触裂纹扩展提供依据.

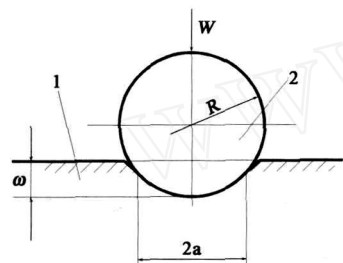
收稿日期: 2008 - 11 - 16; 修回日期: 2009 - 04 - 08; 联系人: 谭援强, e-mail: Tanyq@xtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50875224); 教育部新世纪人才培养计划资助项目 (NCET06 - 0708).

作者简介: 谭援强 (1966 -), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事摩擦学和制造工艺力学的研究.

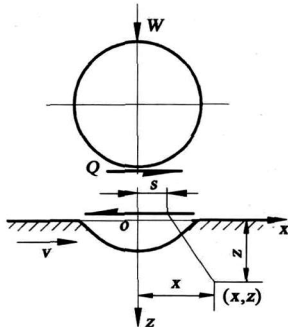
1 摩擦滑动接触的计算模型

无限长圆柱和无限半空间沿着垂直于圆柱轴线方向的滑动接触,如果忽略由 Poisson ratio 所引起的沿着圆柱轴线方向的滑动,简称为平面和圆柱的滑动接触,可以简化为平面应变问题,其计算模型如图 1 所示. 平面表示为体 1,圆柱表示为体 2 体 1 和体 2 的弹性参数分别为: E_1 、 E_2 、 ν_1 、 ν_2 ; 体 2 受到向下的外载荷 W 作用,如图 1(a) 所示,同时,体 1 沿着水平向右滑动,如图 1(b) 所示. 于是,体 1 和体 2 之间产生相对运动和相互作用的分布切向摩擦力. 这个分布切向摩擦力 Q ,分别作用在两接触体表面,方向与运动方向相反,摩擦力 Q 按初始滑动时的极限摩擦状态考虑.



(a) Normal contact

between the cylinder and the plane



(b) Shear directions in the contact

surfaces of both the cylinder and the plane

Fig. 1 The frictionally slipping contact mode

between the cylinder and the plane

图 1 圆柱和平面之间的摩擦滑动接触模型

2 摩擦滑动接触的应力分量计算式

当圆柱和平面之间产生摩擦滑动接触时,平面中产生的应力场处于平面应变状态,接触产生的分布压力及切向牵引力所引起的应力可按 Johnson^[1] 给出的公式计算:

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} -$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (1)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} -$$

$$\frac{2z^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} -$$

$$\frac{2z}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (3)$$

其中: $p(s)$ 和 $q(s)$ 分别为接触面上的分布接触压力和分布切向牵引力,它们分别按 Hertz 理论和 Coulomb 摩擦定律确定; s 表示接触区中任意一点至接触中心的距离, x 、 z 表示体 1 中任意一点的坐标.

法向作用线载荷可表示为:

$$P = \frac{\pi a^2 E^*}{4R} \quad (4)$$

接触半宽为:

$$a^2 = \frac{4PR}{\pi E^*} \quad (5)$$

其中: R 表示圆柱的半径; E^* 表示等效弹性模量, $1/E^* = \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}$. 接触压力的分布函数为:

$$P(s) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - s^2)^{1/2} \quad -a \leq s \leq a \quad (6)$$

由此可知接触压力在边缘处为零,接触区中心压力为:

$$P_0 = \frac{2P}{\pi a} = \frac{4}{\pi} p_m = \left(\frac{PE^*}{\pi R} \right)^{1/2} \quad (7)$$

P 为线载荷,假设作用在圆柱上的铅垂载荷为 W ,则: $P = \frac{W}{L}$, L 为圆柱轴线的长度. p_m 是接触区的平均压力.

当接触两体处于初始摩擦滑动状态时, $Q = \mu p(s)$, μ 是摩擦系数. 在接触表面分布剪切牵引力 Q 可以表达为:

$$Q = q(s) = -\frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - s^2} = -\frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - s^2} \quad -a \leq s \leq a \quad (8)$$

将分布压力 (6) 和分布剪切牵引力 (8) 分别代入到平面内的应力分量计算公式 (1~3)^[1], 可得:

$$\sigma_x = -p \left[m \left(1 + \frac{z^2 + n^2}{n^2 + m^2} \right) - 2z \right] + q \left[2x + \frac{mz(x^2 - n^2)}{x(m^2 + n^2)} \right]$$

$$\frac{2m[2x^2z^2 + n^2(-1 + x^2 - z^2)]}{(n^2 + m^2)xz} \quad (9)$$

$$\sigma_z = -p_0 m \left[1 - \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right] + q_0 \left[\frac{mz(x^2 - n^2)}{x(m^2 + n^2)} \right] \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = -p_0 \left[\frac{mz(x^2 - n^2)}{x(m^2 + n^2)} \right] + -q_0 \left[m \left[1 - \frac{z^2 + n^2}{n^2 + m^2} \right] - 2z \right] \quad (11)$$

其中:表达式 m 、 n 分别为:

$$m^2 = \frac{1}{2} \{ [(1 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2]^{1/2} + (1 - x^2 + z^2) \} \quad (12)$$

$$n^2 = \frac{1}{2} \{ [(1 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2]^{1/2} - (1 - x^2 + z^2) \} \quad (13)$$

在 (9~13) 式中: x 和 z 是无量纲坐标, 如果半无限平面中任意一点的坐标为 (x', z') , 则: $x = x'/a$, $z = z'/a$ (9~11) 式表示当圆柱与半无限平面产生摩擦滑动接触时在平面中应力分量的计算式。

3 组合应力计算公式

在平面内任意一点的应力状态可以用四个应力分量进行描述, 即: σ_x 、 σ_z 、 τ_{xz} 以及 σ_y 。 σ_y 是沿着圆柱轴线方向的应力, 也是平面内任意一点的中间主应力, 其大小根据式 $\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$ 确定。在平面

中各组合应力可用应力分量表达如下:

主应力可表达为:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) - \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

主剪应力为:

$$\tau_1 = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

Von - Mises 等效应力为:

$$\sigma_{eq} = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xz}^2] \right\}^{1/2} \quad (17)$$

通过对这些组合应力的分析, 可以预测材料的变形和失效形式。

4 应力的分布分析

为了清楚地表达圆柱与半无限平面之间发生滑动接触时平面内应力的分布, 根据上面所给出的应力计算公式, 绘出了应力的分布曲线, 如图 2 所示。

在描绘图 2 中的 (a)~(g) 时, 取摩擦系数 $\mu = 0.3$, 泊松比 $\nu = 0.3$; 而在描绘图 2 中的 (h) 时, 取摩擦系数 $\mu = 0.2$, 泊松比仍然是 $\nu = 0.3$ 。下面分析中所提到的坐标 x 和 z 为接触平面中点的实际坐标。

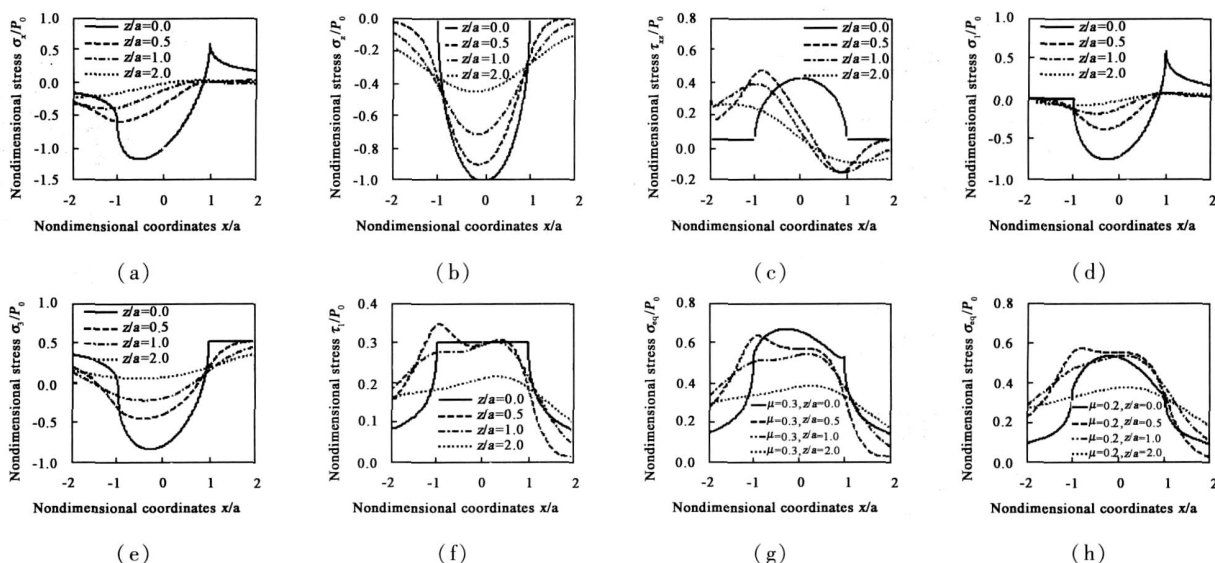


Fig 2 Distributing curves of the dimensionless stress inside the plane as the frictionally slipping contact arises between a plane and a cylinder

图 2 当平面和圆柱产生摩擦滑动接触时在平面中无量纲应力分布曲线

为了使应力分布曲线所表示的意义具有一般性,应力和位置坐标均采用无量纲形式;上面 (9) 式在 $z = 0$ 具有奇异性. 因此,计算 σ_x 时,可以取 z 为一个极小量,本文取 $z/a = 0.00001$,将 z 的值近似看作为零,以避免这种奇异性. 下面根据应力分布曲线,分析应力的变化特点.

x 轴向无量纲应力 σ_x/p_0 相对于无量纲坐标 x/a 的分布曲线如图 2(a) 所示. 由图 2(a) 可知:在接触表面上,导向边 ($x/a < 0$) 的 σ_x/p_0 均为压应力,最大无量纲压应力出现在导向边 ($x/a < 0$), 并且, $|\sigma_x/p_0|_{\max} > 1$,这主要是接触面上剪切牵引力作用的结果;在拖动边存在拉应力,最大无量纲拉应力发生在 $x/a = 1$ 处 (即拖动边的边缘). 在平行于接触表面的不同截面上,随着离接触表面的距离 z/a 的增大, x 轴向无量纲应力 $|\sigma_x/p_0|$ 迅速减小;当 $z/a \geq 0.5$ 的横截面上, σ_x/p_0 几乎不会出现拉应力. 总之,最大拉应力和最大压应力均会出现在接触表面.

z 轴向无量纲应力 σ_z/p_0 随着无量纲坐标 x/a 的变化表示在图 2(b) 中. 图 2(b) 表明:在接触平面内, z 轴向无量纲应力 σ_z/p_0 均为压应力;在接触表面的 $x/a = 0$ 处, σ_z/p_0 达到最大压应力 -1 , 而在 $x/a = \pm 1$ 处, $\sigma_z/p_0 = 0$. 在平行于接触表面的截面上,随着 z/a 的增大,最大的无量纲压应力 σ_z/p_0 逐渐减小; z 轴向无量纲应力 σ_z/p_0 的分布受接触面上剪切牵引力的影响较小,相对于接触中心仍然保持近似对称. 这与 Vijaywargiya 和 Green^[10] 发现的结果和与 Zhupanska 和 Ulitko^[11] 精确计算结果基本一致.

无量纲剪应力 τ_{xz}/p_0 相对于无量纲坐标 x/a 的分布曲线如图 2(c) 所示. 图 2(c) 表明:在接触表面上,无量纲剪应力 τ_{xz}/p_0 的分布相对于接触中心对称;在 $x/a = 0$ 处, τ_{xz}/p_0 达到极大值. 在平行于接触表面的其他横截面上均有两个极值点,极值点的位置会随着 z/a 的增大而向两边外移. 最大剪应力不会出现在接触表面,而会存在于接触体内. 因此,塑性滑移开始首先可能会发生在接触平面内.

第一无量纲主应力 σ_1/p_0 相对于无量纲坐标 x/a 的分布如图 2(d) 所示. 由图 2(d) 可知:第一无量纲主应力 σ_1/p_0 不是对称分布,这是由于接触表面上剪切牵引力引起的;在拖动边存在拉应力,而在导向边均为压应力;在接触表面上,最大无量纲拉应力存在于拖动边的 $x/a = 1$ 处,即拖动边的边缘;而最大压应力出现在导向边 $-1 < x/a < 0$ 的区域;在平行于接触表面的横截面上,离接触表面的距离 (z/a) 越大,最大拉应力和最大压应力则越小;当 $x/a = \pm 1$ 时,第一无

量纲主应力 σ_1/p_0 已接近于零. 总之, σ_1/p_0 的最大拉应力和最大压应力,均会出现在接触表面. 因此,如果接触体由第一主应力引起失效,首先可能会出现在接触表面;而第一型裂纹的产生和扩展首先可能会发生在接触表面拖动边的边缘.

第三无量纲主应力 σ_3/p_0 相对于无量纲坐标 x/a 的分布情况如图 2(e) 所示. 由图 2(e) 可知:第三无量纲主应力 σ_3/p_0 分布曲线相对于接触中心不是对称分布,并且均是压应力;最大的 $|\sigma_3/p_0|$ 出现在接触表面 $-1 < x/a < 0$ 的区域,而当 $x/a = 1$ 时, $\sigma_3/p_0 = 0$;在平行于接触表面的不同横截面上,随着 z/a 的增大,最大的 $|\sigma_3/p_0|$ 逐渐减小,随着 $|x/a|$ 的增大, $|\sigma_3/p_0|$ 也会随之减小. 由此可知:如果压应力的作用导致接触体失效,这种失效首先可能会出现在接触表面 $-1 < x/a < 0$ 的区域.

无量纲主剪应力 τ_1/p_0 相对于无量纲坐标 x/a 的分布表示在图 2(f) 中. 从图 2(f) 可以看出:在接触表面的接触区,主剪应力为常量;在平行于接触表面的横截面上,无量纲主剪应力 τ_1/p_0 在导向边存在极大值. 总之,最大的 τ_1/p_0 会出现在接触平面内部,按照 Tresca 屈服准则,塑性开始首先会出现在接触平面内部.

图 2(g)、(h) 表示了 Von - Mises 无量纲等效应力 σ_{eq}/p_0 相对于无量纲坐标 x/a 的分布. 由图 2(g)、(h) 可知: Von - Mises 无量纲等效应力 σ_{eq}/p_0 的最大值会随着摩擦系数由小变大从接触体内移向接触表面;随着摩擦系数的增大, Von - Mises 无量纲等效应力 σ_{eq}/p_0 会增大. 在接触表面上的极大值发生在 $x/a = 0$ 的邻近区域;在平行于接触表面的不同横截面上,随着 z/a 的增大, σ_{eq}/p_0 逐渐减小. 因此,根据 Mises 屈服准则,当摩擦系数较小时,塑性滑移开始首先会发生在接触体内.

由以上分析可知:当圆柱与平面产生滑动接触时,轴向应力、第一主应力、第三主应力的最大压应力和 x 轴向应力、第一主应力的最大拉应力均出现在接触表面;而剪应力,主剪应力及 Von - Mises 等效应力 (当摩擦系数较小时) 的最大值均出现在接触体内. 因此,拉、压应力引起的失效均会发生在接触表面;根据 Tresca 屈服准则、Mises 屈服准则,塑性滑移开始首先会发生在接触体内,这一点与 Kogut 和 Etsion^[4-8] 的结论一致.

5 结论

a 基于 Hertz 理论,圆柱与平面之间产生摩

擦滑动接触时平面内应力分量可以采用公式 (9~11) 表达.

b 当圆柱与平面之间产生摩擦滑动接触时, 在接触表面上存在最大拉应力和最大压力; 最大拉应力出现在接触表面拖动边的边缘, 而最大压应力发生在导向边. 因此, 如果接触体的失效是由于拉应力 (或者压应力) 导致的, 这种失效首先可能会出现在接触表面; 第一型裂纹的产生及扩展首先会发生在拖动边的边缘.

c 当圆柱与平面之间产生摩擦滑动接触时, 剪应力, 主剪应力及 Von - Mises 等效应力 (当摩擦系数较小时) 的最大值均会出现在接触体内, 并且均存在于导向边. 因此, 塑性滑移开始首先会发生在接触体内, 然后才扩展到接触表面.

参考文献:

- [1] Johnson K L. Contacts Mechanics [M]. London: Cambridge University Press, 1985.
徐秉业, 罗学富, 刘信声, 等译. 接触力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
- [2] Mindlin R D. Compliance of elastic bodies in contact [J]. Journal of Applied Mechanics 1949, 71(16): 259 - 268.
- [3] Maouche N, Maitoum M H, Van K D. On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts [J]. Wear, 1997, 203 - 204 (3): 139 - 147.
- [4] Qiu H, Hills D A, Nowella D, *et al* Skew sliding of an elastic cylinder: An investigation of convection in contact [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50 (2): 293 - 298.
- [5] Kogut L, Etsion I A static friction model for elastic - plastic contacting rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 2004, 126 (1): 35 - 40.
- [6] Kogut L, Etsion I Elastic - plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat [J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69 (9): 657 - 662.
- [7] Kogut L, Etsion I A semi - analytical solution for the sliding inception of a spherical contact [J]. Journal of Tribology, 2003, 125 (6): 499 - 506.
- [8] Chang W R, Etsion I, Bogy D B. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 1988, 110 (1): 57 - 63.
- [9] Etsion I, Levinson O, Halperin G, Varenberg M. Experimental investigation of the elastic - plastic contact area and static friction of a sphere on flat [J]. Journal of Tribology, 2005, 127 (1): 47 - 50.
- [10] Vijaywargiya R, Green I, A finite element study of the deformations, forces, stress formations, and energy losses in sliding cylindrical contacts [J]. International Journal of Non - Linear Mechanics, 2007, 42 (7): 914 - 927.
- [11] Zhupanska O I, Uliiko A E. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half - space [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 2005, 53 (5): 975 - 999.

Analysis of the Slipping Contact Between a Cylinder and a Plane on the Base of Hertz Theory

FENG Jian - jun, TAN Yuan - qiang

(School of Mechanical Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: The expressions of the stress component in the plane (contacting body) are derived as the frictionally slipping contact arises between a plane and a cylinder on the basis of Hertz theory. Distributions of the stress in the plane are analyzed in detail, and their characteristics are presented. There exist the maximal tensile stress and the maximal compressive stress in the contacting surface. The maximal tensile stress occurs at the edge of the dragging side, and the maximal compressive stress takes place at the area of the leading side. Therefore, if the failure in the contact plane is induced by the tensile or compressive stress, it occurs firstly in the contacting surface; the first crack generation and propagation firstly take place at the edge of the dragging side. The maximums of the shear stress, the principal shear stress and the Von - Mises equivalent stress (when the frictional coefficient is small) all occur inside the contacting body, and they all exist in the leading side. Therefore, The plastic slipping inception firstly takes place inside the contact plane, and then extends to the contacting surface. Those conclusions provide a base for the study of the engineering application.

Key words: frictionally slipping contact, equivalent stress, principal stress, contact pressure, shear traction

Author: TAN Yuan - qiang, male, born in 1966, Ph. D., Professor, e - mail: Tanyq@xtu.edu.cn